拡散効果のあるSIS感染症モデルの局所対策について (数理モデルと関数方程式の解のダイナミクス)

AUTHOR(S):

佐々木, 徹

CITATION:

佐々木, 徹. 拡散効果のあるSIS感染症モデルの局所対策について (数理モデルと関数方程式の解のダイナミクス). 数理解析研究所講究録 2004, 1372: 123-127

ISSUE DATE:

2004-04

URL:

http://hdl.handle.net/2433/25501

数理解析研究所講究録 1372 巻 2004 年 123-127

拡散効果のある SIS 感染症モデルの局所対策について

岡山大学・環境理工学部　佐々木 徹 (Toru Sasaki)
Department of Mathematical and Environmental Sciences,
Okayama University

1　始めに

本稿では, 空間構造を考慮した感染症モデルにおいて, 一部の地域における感染率を低下させることにより感染が全地域に置いて消滅するか否かという問題について考える.

生態学においては類似の問題, すなわち個体群が空間非一様な環境においてどのような動態を示すかという問題に関しては, 既に多くの研究がなされている. (例えば [1, 2, 5, 6, 8] 等.) ここでは, 同様の問題を感染症の伝播に対して考える.

生態学における各種間の相互作用と, 感染症の伝播における各クラス間の相互作用は, 一般には異なっており, それぞれに応じた扱いを必要とする. しかし, 感染症の問題の中には生態学における方程式に帰着させることが出来るものがある. それがここで述べる SIS モデルである.

2　SIS モデル

SIS モデルは, 感受性者 (Susceptibles), すなわち感染する可能性のある者 (当然感染していない) と感染者 (Infected) のふたつのクラスを考えるもので, 感染症伝播の基本的なモデルのひとつである. 感受性者 (S) が感染者と接触することにより感染し, 感染者 (I) のクラスにシフトし, 時間がたつと感染が直り再び感受性者 (S) のクラスに戻るという状況を考えていることから SIS モデルと呼ばれる. 感染から復帰すると, 感染前と同じように感染の可能性に曝されることになるので, 免疫の効果が無視できるような感染症を考えることになる. 本セクションでは, 各クラスが空間的に均一に混じっている状態を考える. このような場合には考える問題は常微分方程式系で記述される. このようなタイプの感染症モデル (SIS モデルを含む) は [3] において詳しく述べられているのであるが, 後の議論のお手本になるので, ここで簡単に SIS モデル (常微分方程式モデル) について説明する.

時刻 t における総人口を $N(t)$ とし, そのうちの感受性者の割合を $S(t)$, 感染者の割合を

$I(t)$ とする. 単位時間において一人の感染者が他者と感染に至る接触する回数を λ とする. すると, 単位時間において新たに感染する者の数は, 感染者ひとりあたり λS となり, よって単位時間あたりの新しい感染者数は λSIN となる. 感染からの回復率を γ とし, 出生率と死亡率がともに μ とする. このとき, $S(t)$ と $I(t)$ は次の方程式をみたすことになる:

$$\begin{aligned}\frac{dNS}{dt} &= -\lambda NIS + \gamma NI + \mu N - \mu NS,\\ \frac{dNI}{dt} &= \lambda NIS - \gamma NI - \mu NI.\end{aligned} \tag{1}$$

方程式系 (1) は簡単に解くことが出来る. (1) のふたつの式を加える事により, N が定数であることがわかる. ここで

$$S(t) + I(t) = 1 \tag{2}$$

という関係を用いている. また, (2) を用いて (1) の第 2 式から S を消去し, 両辺を定数 N で割ることにより, ロジスティック方程式

$$\frac{dI}{dt} = (\lambda - (\gamma + \mu))I - \lambda I^2.$$

を得る. これを解く事により S, I を求めることが出来る.

以上より, $t \to \infty$ のとき

$$\begin{aligned}&I(t) \to 1 - \frac{\gamma + \mu}{\lambda} \quad \text{if } \lambda > \gamma + \mu,\\ &I(t) \to 0 \quad \text{if } \lambda \leq \gamma + \mu,\end{aligned} \tag{3}$$

となり, 時間経過により感染が消滅する条件が $\lambda \leq \gamma + \mu$ であることがわかる.

3 拡散効果を伴う SIS モデル

セクション 2 で述べた方程式系に拡散の効果を加えると, 偏微分方程式系

$$\frac{\partial NS}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla (NS)) - \lambda SNI + \gamma NI + \mu N - \mu NS, \tag{4}$$

$$\frac{\partial NI}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla (NI)) + \lambda SNI - \gamma NI - \mu NI. \tag{5}$$

を得る. ここで, κ は拡散係数である. 本セクションでは, 適当な問題設定の下で, 方程式系 (4), (5) の境界値問題が, 空間 1 次元の Fisher 型方程式の境界値問題に帰着されることを示す.

まず, 拡散係数 κ, 回復率 γ, 死亡, 出生率 μ は位置と時間には依存しない定数であると仮定する.

次に, 考える領域は長方形領域 $\Omega = \{(x,y) | 0 < x < X, 0 < y < Y\}$ とし, この領域を $\Omega_0 = \{(x,y) \in \Omega;\ x < lX\}$ と $\Omega_1 = \{(x,y) \in \Omega;\ x > lX\}$ $(0 < l < 1)$ のふたつの部分に分ける. このうち, Ω_0 では特に感染率を下げることをせずに, Ω_1 において感染率を下げるものとする. 各部分領域において感染率は一定の値をとることとし, その感染率をそれぞれ λ_0, λ_1 とする:

$$\lambda = \lambda(x,y) = \begin{cases} \lambda_0 & \text{for } 0 < x \le lX, \\ \lambda_1 & \text{for } lX < x < X. \end{cases} \tag{6}$$

ここで, Ω_0 における感染率 λ_0 は, 局所的には感染が持続できるくらい高いとする. これは (3) より

$$\lambda_0 > \gamma + \mu \tag{7}$$

となる. 逆に λ_1 は, 局所的には感染が消失するくらい低いとする:

$$\lambda_1 < \gamma + \mu. \tag{8}$$

また, 全領域 Ω の境界を通して個体の流入出はないものとする. すなわち Neumann 境界条件

$$\frac{\partial NS}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial NI}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \tag{9}$$

を課す. ここで, n は境界上の外向き法線方向ベクトルである.

さて, 方程式 (4), (5) を加えると

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla N) \tag{10}$$

となり, N のみたす境界条件は, (9) より

$$\frac{\partial N}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \tag{11}$$

となる. すなわち総人口 N は感染の影響を受けずにに拡散することがわかる. このことをふまえ, 問題を考える時点において総人口は既に空間的に一様な平衡常態にあると仮定しよう. この仮定の下では (10), (11) の解は定数になる.

以上の状況下では, セクション 2 と同様に, 方程式 (5) に $S = 1 - I$ を代入し, 定数 N で割ることにより, Fisher 型の方程式

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla I) + (\lambda - \gamma - \mu) I - \lambda I^2 \quad \text{in } \Omega \tag{12}$$

を得る. また, I の境界条件は

$$\frac{\partial I}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \tag{13}$$

となる.

局所的な感染対策を施している状態では $\lambda(x,y)$ は (6) のようになるが, 対策前の状況では Ω 全体で $\lambda(x,y) \equiv \lambda_0$ である. よく知られているように, このとき方程式 (12) の解は, $t \to \infty$ のときに, 定常平衡解 $I = 1 - (\gamma+\mu)/\lambda_0$ に近づく [4]. よって, 局地的な対策を行う時点で既に, 感染の分布が定常状態に達していると仮定すると, 考えている問題の初期値は

$$I(x,y,0) = 1 - \frac{\gamma+\mu}{\lambda_0} \quad \text{for } (x,y) \in \Omega \tag{14}$$

となる. このとき, 問題 (12), (13), (14) において, y 軸方向の flux は 0 となり, x 軸方向だけ考えればよいことになる.

以上より, 我々の問題は以下の問題に帰着されたことになる:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + (\lambda - \gamma - \mu)I - \lambda I^2 \quad \text{for } 0 < x < X, t > 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial I}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial I}{\partial x}(X,t) = 0 \quad \text{for } t > 0. \tag{16}$$

ただし, $\lambda = \lambda(x)$ は (6) によって自然に定められるものである.

4 感染の持続, 消滅の臨界値

方程式 (15) は, 生態学に関連して深く調べられている. (例えば [1, 5, 6, 8] 等.) 特に [1, 5] の方法を用いることにより, 感染の持続と消滅の臨界値を求めることが出来る. ここでは, 対策をせずに感染率が下がっていない領域 Ω_0 の割合 l に関する臨界値を考えよう.

ここで用いる方法は, (15), (16) に対応する線型固有値問題

$$\frac{d^2 I}{dx^2} + (\lambda - \gamma - \mu)I = \sigma I \quad \text{for } 0 < x < X, \tag{17}$$

$$\frac{dI(0)}{dx} = \frac{dI(X)}{dx} = 0 \tag{18}$$

を考えるというものである. 問題 (15), (16) の $t \to \infty$ のときの解の挙動は, 固有値問題 (17), (18) の主固有値 σ の符号によって決まる. 主固有値 σ は, 領域全体での感染者の再生産率に相当し, $\sigma > 0$ ならば (15), (16) の非負の自明でない C^1 級の解は正の定常解に収束し, $\sigma < 0$ ならば (15), (16) の非負の解は 0 に収束する [1]. すなわち, 臨界値を得るためには, 主要固有値 σ が 0 となる条件を求めればよい.

主要固有値が 0 になるための条件を調べるためには,

$$\frac{d^2 I}{dx^2} + (\lambda - \gamma - \mu)I = 0 \quad \text{for } 0 < x < X, \tag{19}$$

が境界条件 (18) の下で, 非負の弱解を持つ条件を求めればよい. このためには, (19), (18) を区間 $0 < x < lX$, $lX < x < X$ で別々に解き, つなぎ目 $x = lX$ で C^1 級に出来る条件を求めればよい. (詳細は [7] を見られたい.) これにより, 条件

$$\begin{aligned} &\sqrt{\lambda_0 - \gamma - \mu}\tan\left(\frac{X}{\sqrt{\kappa}}\sqrt{\lambda_0 - \gamma - \mu}\cdot l\right) \\ &= \sqrt{\gamma + \mu - \lambda_1}\tanh\left(\frac{X}{\sqrt{\kappa}}\sqrt{\gamma + \mu - \lambda_1}\cdot(1 - l)\right) \end{aligned} \tag{20}$$

を得る.

すなわち, (20) を l の方程式とみて, その最小の正の根を l_c とおくと, $l < l_c$ のとき感染は時間経過とともに消滅し, $l > l_c$ のとき感染は持続する.

参考文献

[1] R. S. Cantrell and C. Cosner, *Diffusive logistic equations with indefinite weights: Population models in disrupted environment*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 112 (1989), pp. 293–318.

[2] ——, *The effect of spatial heterogeneity in population dynamics*, J. Math. Biol., 29 (1991), pp. 315–338.

[3] H. W. Hethcote, *Qualitative analysis of communicable disease models*, Math. Biosci., 28 (1976), pp. 335–356.

[4] J. D. Logan, *Nonlinear Partial Differential Equations*, Weily-Interscience, New York, 1994.

[5] D. Ludwig, D. G. Aronson, and H. F. Weinberger, *Spatial patterning of the spruce budworm*, J. Math. Biol., 8 (1979), pp. 217–258.

[6] S. W. Pacala and J. Roughgarden, *Spatial heterogeneity and interspecific competition*, Theoret. Population Biol., 21 (1982), pp. 92–113.

[7] T. Sasaki, *The effect of local prevention in an SIS model with diffusion*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, 2004 (to appear).

[8] N. Shigesada, K. Kawasaki, and E. Teramoto, *Traveling periodic waves in heterogeneous environments*, Theoret. Population Biol., 30 (1986), pp. 143–160.